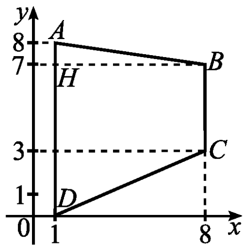
Решение варианта № 2

1 $0{,}7 \cdot 42 = 29{,}4$ (руб.) — стоимость всех SMS-сообщений.

$60{,}4 - 29{,}4 = 31$ (руб.) — остаток денег.
Ответ: 31.

2 Наибольшая температура 6 августа после 6 : 00 равна 29°.
Ответ: 29.

3 По рисунку найдём длины оснований и высоту трапеции $ABCD$.



$BC = 7 - 3 = 4$, $AD = 8$, $BH = 8 - 1 = 7$.

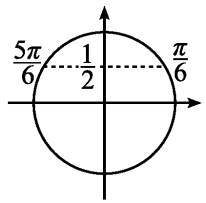
$S_{ABCD} = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot BH$, $S_{ABCD} = \dfrac{4+8}{2} \cdot 7 = 42$.

Ответ: 42.

4 Очерёдность выступлений Коли Д., Оли М. и Даши В. можно установить 6 способами (КОД, КДО, ДОК, ДКО, ОКД, ОДК), из которых 2 способа, когда Коля Д. будет выступать после Оли М. и Даши В. (ОДК, ДОК). Значит, вероятность того, что Коля Д. будет выступать после Оли М. и Даши В., равна $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \approx 0{,}33$.

Ответ: 0,33.

5 $\sin \dfrac{\pi(5x-2)}{3} = \dfrac{1}{2}$ (см. рис.).



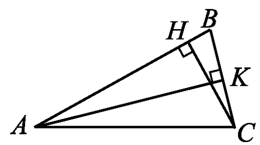
$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi(5x-2)}{3} = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ \dfrac{\pi(5x-2)}{3} = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z, \text{(см. рис.);} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 5x - 2 = \dfrac{1}{2} + 6k,\ k \in Z, \\ 5x - 2 = \dfrac{5}{2} + 6k,\ k \in Z; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{10} + \dfrac{6k}{5},\ k \in Z, \\ x = \dfrac{9}{10} + \dfrac{6k}{5},\ k \in Z. \end{array}\right.$$

Наименьший положительный корень $\dfrac{5}{10} = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

6 По условию задачи $AB = 12$, $BC = 8$, $CH = 4$ (см. рис.).



Найдём площадь треугольника ABC.

$S_{ABC} = \dfrac{AB \cdot CH}{2} = \dfrac{12 \cdot 4}{2} = 24$. С другой стороны,

$S_{ABC} = \dfrac{BC \cdot AK}{2} = \dfrac{8 \cdot AK}{2} = 24$, откуда $AK = 6$.

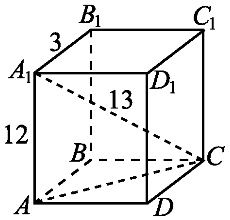
Ответ: 6.

7 Среди отмеченных точек промежуткам убывания принадлежат те, в которых $f'(x)$ меньше нуля. Таких точек 5.

Ответ: 5.

8

Используя формулу длины диагонали прямоугольного параллелепипеда, имеем $A_1C^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$ (см. рис.).



$AD = BC$, $AA_1 = DD_1 = 12$, $AB = A_1B_1 = 3$; $169 = 9 + BC^2 + 144$, $BC^2 = 169 - 153 = 16$, $BC = 4$.

Ответ: 4.

9

$$\frac{3\log_{27} 288}{5\log_3 2 + 2} = \frac{3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \log_3 288}{\log_3 2^5 + \log_3 3^2} = \frac{\log_3 288}{\log_3 288} = 1.$$

Ответ: 1.

10

$\varphi = \omega t + \dfrac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega = 20°/\text{мин}$, $\beta = 4°/\text{мин}^2$, $\varphi = 2400°$.

$20t + \dfrac{4t^2}{2} = 2400;$

$2t^2 + 20t - 2400 = 0;$
$t^2 + 10t - 1200 = 0;$
$t_1 = 30, t_2 = -40.$

Так как $t > 0$, то время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу, равно 30 минут.

Ответ: 30.

11

Кольцевая трасса имеет протяжённость 4 км. Гонщикам необходимо проехать 75 кругов, то есть преодолеть расстояние $75 \cdot 4 = 300$ (км). Обозначим x км/ч ($x > 0$) — скорость первого гонщика, а y км/ч ($y > 0$) — скорость второго гонщика, тогда $\dfrac{300}{x}$ — время первого гонщика, $\dfrac{300}{y}$ — время второго гонщика. Разность между временем второго и первого гонщиков равна 37,5 минуты, или $\dfrac{37{,}5}{60}$ ч$= 0{,}625$ часа.

Составим уравнение $\dfrac{300}{y} - \dfrac{300}{x} = 0{,}625$, $300(x - y) = 0{,}625xy$, $480(x - y) = xy$.

Во втором условии сказано, что первый гонщик обогнал второго на 1 круг за 10 минут, или $\dfrac{10}{60}$ ч$= \dfrac{1}{6}$ часа.

Составим второе уравнение $\dfrac{1}{6}x - \dfrac{1}{6}y = 4$, $x - y = 24$.

Получим систему уравнений $\begin{cases} 480(x - y) = xy, \\ x - y = 24. \end{cases}$

$x = 24 + y.$

$480(24 + y - y) = y(24 + y);$

$480 \cdot 24 = 24y + y^2;$

$y^2 + 24y - 11\,520 = 0,$

$y_1 = -12 + 108 = 96, y_2 = -12 - 108 = -120.$

Так как $y > 0$, то $y = 96$.

Скорость второго гонщика равна 96 км/ч.

Ответ: 96.

12 $y = (x-3)^2(x+1)+2$,
$y' = 2(x-3)(x+1)+(x-3)^2 = (x-3)(2(x+1)+x-3) =$
$= (x-3)(2x+2+x-3) = (x-3)(3x-1)$.

$y' = 0, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = \frac{1}{3}$.

$y(-1) = (-1-3)^2(-1+1)+2 = 2$,

$y(\frac{1}{3}) = (\frac{1}{3}-3)^2(\frac{1}{3}+1)+2 = 11\frac{13}{27}$,

$y(3) = (3-3)^2(3+1)+2 = 2$,
$y(5) = (5-3)^2(5+1)+2 = 4\cdot 6+2 = 26$.

Наименьшее значение функции $y = (x-3)^2(x+1)+2$ на отрезке $[-1;5]$ равно 2.

Ответ: 2.

13 а) Решим уравнение:

$4\sqrt{3}\sin x - 2\sqrt{3}\sin^2 x = \sin 2x - 4\cos x$,

$2\sqrt{3}\sin x(2-\sin x) = 2\sin x\cos x - 4\cos x$,

$\sqrt{3}\sin x(2-\sin x) = -\cos x(2-\sin x)$,

$(2-\sin x)\cdot(\sqrt{3}\sin x + \cos x) = 0$.

1) $2-\sin x = 0, \sin x = 2$. Это уравнение корней не имеет.

2) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$.

Если $\cos x = 0$, то $\sin x = \pm 1$ и такие значения x не являются корнями уравнения. Значит, $\cos x \neq 0$. Поделим на $\cos x$ обе части уравнения.

$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x + 1 = 0$,

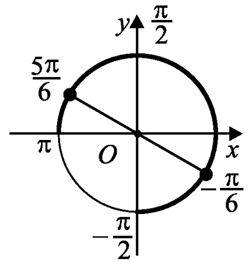
$\mathrm{tg}\, x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$,

$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

б) Отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$ принадлежат корни уравнения:

$x_1 = -\frac{\pi}{6}$;

$x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ (см. рис.).



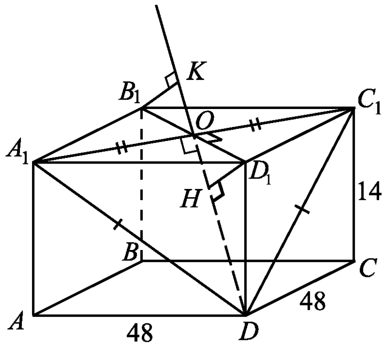
Ответ: а) $-\frac{\pi}{6}+\pi n, n \in Z$; б) $-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}$.

14 а) Рассмотрим рисунок. $AA_1 = CC_1 = 14$, по теореме Пифагора $A_1D^2 = AA_1^2 + AD^2$, $C_1D^2 = CC_1^2 + DC^2$, $A_1C_1^2 = A_1D_1^2 + D_1C_1^2$

Получаем $A_1C_1 = \sqrt{48^2+48^2} = 48\sqrt{2}$;
$A_1D = C_1D = \sqrt{48^2+14^2} = 50$.

$\triangle A_1C_1D$ равнобедренный.

Проведём $DO \perp A_1C_1$. O — середина A_1C_1. В квадрате $A_1B_1C_1D_1$ диагонали перпендикулярны и равны, поэтому точка O — точка пересечения диагоналей.



$A_1O = OC_1 = B_1O = OD_1 = A_1C_1 : 2 = 24\sqrt{2}$.

Проведём $D_1H \perp OD$ и $B_1K \perp OD$.

$\triangle B_1KO = \triangle D_1HO$ по гипотенузе и острому углу ($\angle KOB_1 = \angle HOD_1$ как вертикальные), отсюда $B_1K = D_1H$.

Докажем, что D_1H — расстояние от D_1 до плоскости A_1C_1D. Для этого необходимо указать две прямые в плоскости A_1C_1D, перпендикулярные D_1H.

$OD \perp D_1H$ по построению. $A_1C_1 \perp D_1O$ и $A_1C_1 \perp OD$, значит, $A_1C_1 \perp (OD_1D)$ и A_1C_1 перпендикулярна любой прямой, лежащей в данной плоскости. $D_1H \perp A_1C_1 \Rightarrow D_1H \perp (A_1C_1D_1)$.

Аналогично $B_1K \perp (A_1C_1D)$, значит, B_1K — расстояние от B_1 до плоскости A_1C_1D. Мы получили ранее, что $B_1K = D_1H$.

б) В $\triangle OD_1D$ высоту D_1H найдём, выражая площадь треугольника двумя способами.

$S_{OD_1D} = \frac{1}{2}OD \cdot D_1H = \frac{1}{2}OD_1 \cdot DD_1$. Тогда

$$D_1H = \frac{OD_1 \cdot DD_1}{OD} = \frac{OD_1 \cdot DD_1}{\sqrt{OD_1^2 + DD_1^2}} = \frac{24\sqrt{2} \cdot 14}{\sqrt{1\,348}} = \frac{24 \cdot 14}{\sqrt{674}} = \frac{336}{\sqrt{674}}.$$

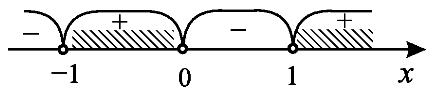
Ответ: $\frac{336}{\sqrt{674}}$.

15

$$\text{ОДЗ} \begin{cases} x - 1 > 0, \\ x + 1 > 0, \\ \dfrac{x+1}{x-1} > 0, \\ \dfrac{x+1}{x-1} \neq 1, \\ x - 1 \neq 0; \end{cases} \quad x > 1$$

$$\log_2 \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{\log_2 \dfrac{x+1}{x-1}} > 0,\ t = \log_2 \frac{x-1}{x+1}, t - \frac{1}{t} > 0,$$

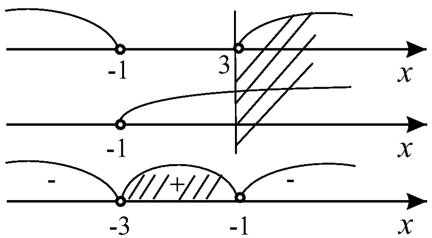
$\dfrac{(t-1)(t+1)}{t} > 0$ (см. рис.).



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} t>-1,\\ t<0,\end{cases}\\ t>1;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} \log_2\dfrac{x-1}{x+1}>-1,\\[2mm] \log_2\dfrac{x-1}{x+1}<0,\end{cases}\\[2mm] \log_2\dfrac{x-1}{x+1}>1;\end{array}\right.$$

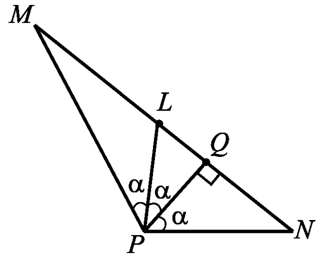
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} \log_2\dfrac{x-1}{x+1}>\log_2\dfrac{1}{2},\\[2mm] \log_2\dfrac{x-1}{x+1}<\log_2 1,\end{cases}\\[2mm] \log_2\dfrac{x-1}{x+1}>\log_2 2;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1}>\dfrac{1}{2},\\[2mm] \dfrac{x-1}{x+1}<1,\end{cases}\\[2mm] \dfrac{x-1}{x+1}>2;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} \dfrac{x-3}{x+1}>0,\\[2mm] \dfrac{-2}{x+1}<0,\end{cases}\\[2mm] \dfrac{-x-3}{x+1}>0.\end{array}\right. \quad \text{(см. рис.).}$$



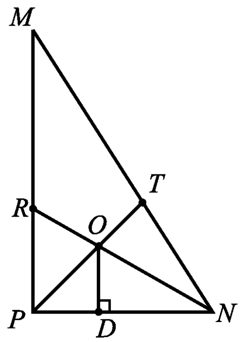
С учётом ОДЗ: $x>3$.
Ответ: $x>3$.

16 а) Рассмотрим $\triangle MPN$ (см. рис.).



В $\triangle LPN$ высота PQ является также биссектрисой, значит, $\triangle LPN$ равнобедренный, PQ — медиана и $LQ=QN=\dfrac{1}{4}MN$. В $\triangle MPQ$ PL — биссектриса, тогда $\dfrac{PQ}{MP}=\dfrac{LQ}{ML}=\dfrac{1}{2}$, $PQ=\dfrac{1}{2}MP$ и $\triangle MPQ$ — прямоугольный с гипотенузой MP, тогда $\angle QMP=30^\circ$, $\angle MPQ=60^\circ$, $2\alpha=60^\circ \Rightarrow \alpha=30^\circ$.

Итак, $\triangle MNP$ — прямоугольный с гипотенузой MN и острым углом 30° (см. рис.).



б) Пусть O — центр вписанной окружности $\triangle MNP$, PT и NR — биссектрисы, $OD = r$ — радиус вписанной окружности $\triangle MNP$.
$\angle OPD = 45^\circ$, тогда $PD = OD = r$.

$\angle OND = \frac{1}{2}\angle MNP = 30^\circ$, тогда

$ND = OD\sqrt{3} = r\sqrt{3}$, $NP = r + r\sqrt{3} =$
$= r(\sqrt{3}+1)$, $MP = NP\sqrt{3} = r\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$.

$S_{MNP} = \frac{1}{2}\cdot MP\cdot NP = \frac{1}{2}\cdot r^2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)^2$ По условию $S_{MNP} = 6+4\sqrt{3}$.

$r^2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)^2 = 12+8\sqrt{3}$; $r^2(\sqrt{3}+1)^2 = 4\sqrt{3}+8$; $r^2(4+2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}+8$;

$r^2 = \dfrac{4(\sqrt{3}+2)}{2(\sqrt{3}+2)}$, $r^2 = 2$; $r = \sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

17 По условию задачи составим таблицу.

Срок вклада	1 мес.	2 мес.	3 мес.	4 мес.	5 мес.	6 мес.
Ставка в % за месяц	$\frac{6\%}{12} = 0{,}5\%$	0,5%	$\frac{18\%}{12} = 1{,}5\%$	1,5%	1%	1%

За первый месяц банк на сумму 100% от начального вклада начислит 0,5%, и вклад увеличится на $100\% \cdot 0{,}005 = 0{,}5\%$. За второй месяц банк на сумму 110% от начального вклада начислит также 0,5%, что составит $110\% \cdot 0{,}005 = 0{,}55\%$.

В третьем месяце начисления по вкладу составят 1,5% от 120%, то есть $120\% \cdot 0{,}015 = 1{,}8\%$, в четвёртом — $130\% \cdot 0{,}015 = 1{,}95\%$, в пятом — $140\% \cdot 0{,}01 = 1{,}4\%$ и в шестом — $150\% \cdot 0{,}01 = 1{,}5\%$.

Всего банк начислил $0{,}5\%+0{,}55\%+1{,}8\%+1{,}95\%+1{,}4\%+1{,}5\% = 7{,}7\%$.
Ответ: 7,7.

18 ОДЗ. $\begin{cases} x > 3a, \\ x > -3a; \end{cases}$ $x > |3a|$.

Обозначим $t = \log_2(x+3a) - \log_2(x-3a)$, при этом исходное уравнение примет вид $t^2 - 13at + 40a^2 - 3a - 1 = 0$. Корни уравнения $t_1 = 8a+1$, $t_2 = 5a-1$. $t_1 = t_2$ при $8a+1 = 5a-1$, $a = -\frac{2}{3}$.

$$t = \log_2\left(\frac{x+3a}{x-3a}\right) = \log_2\left(1 + \frac{6a}{x-3a}\right).$$

1) $a > 0$. В этом случае функция $y(x) = 1 + \dfrac{6a}{x-3a}$ убывает, значит, при $x \in (3|a|; +\infty)$ функция $y(x)$ принимает значения $(1; +\infty)$, тогда $\log_2\left(1 + \dfrac{6a}{x-3a}\right) \in (0; +\infty)$. Так как функция $t = \log_2\left(1 + \dfrac{6a}{x-3a}\right)$ монотонна при $x > 3|a|$, то одному значению t соответствует одно значение переменной x.

Итак, при $a > 0$ новая переменная t принимает положительные значения, значит, для выполнения условия задачи необходимо, чтобы уравнение $t^2 - 13at + 40a^2 - 3a - 1 = 0$ имело два положительных корня.

$$\begin{cases} a > 0, \\ 8a+1 > 0, \\ 5a-1 > 0; \end{cases}$$

$a \in \left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$.

2) $a < 0$. Аналогично предыдущему, в этом случае функция $y(x) = 1 + \dfrac{6a}{x-3a}$ возрастает, значит, при $x \in (3|a|; +\infty)$ функция $y(x)$ принимает значения $(0;1)$, тогда $\log_2\left(1 + \dfrac{6a}{x-3a}\right) \in (-\infty; 0)$. Так как функция $t = \log_2\left(1 + \dfrac{6a}{x-3a}\right)$ монотонна при $x > 3|a|$, то одному значению t соответствует одно значение переменной x.

При $a < 0$ новая переменная t принимает отрицательные значения, значит, для выполнения условия задачи необходимо, чтобы уравнение $t^2 - 13at + 40a^2 - 3a - 1 = 0$ имело два отрицательных корня.

$$\begin{cases} a \neq -\dfrac{2}{3}, \\ a < 0, \\ 8a + 1 < 0, \\ 5a - 1 < 0; \end{cases}$$

$a \in \left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{8}\right)$.

Объединив решения из пунктов 1 и 2, получим $a \in \left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{8}\right) \cup \left(\dfrac{1}{5}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{8}\right) \cup \left(\dfrac{1}{5}; +\infty\right)$.

19

а) Очевидно, что сумма 96 чисел $(-47 - 46 - \ldots - 1 + 0 + 1 + \ldots + 46 + 47) + 48$ равна 48, и понятно, что 0 записан на 48-й странице тетради.

б) Если 0 записан на первой странице, то сумма 96 чисел $0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 94 + 95$ равна 4 560. В этом нетрудно убедиться, используя формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии.

в) Рассмотрим таблицу, в первой строке которой записаны номера страниц по фабричной нумерации, а во второй строке номера, записанные мальчиком.

1	2	$\ldots$	k	$k+1$	$k+2$	$\ldots$	$2k$	$2k+1$	$2k+2$	$2k+3$	$\ldots$	95	96
$-k$	$-(k-1)$	$\ldots$	-1	0	1	$\ldots$	$k-1$	k	$k+1$	$k+2$	$\ldots$	$94-k$	$95-k$

$2k+1$ чисел $\qquad$ $95-2k$ чисел

Сумма первых $2k+1$ чисел равна 0, сумму последних чисел, начиная с $k+1$ по $95-k$, можно найти с помощью формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии. Эта сумма равна $48(95-2k) = S$, которую нашел мальчик. Приравняв её к числу 1 968, получим уравнение $48(95-2k) = 1\,968$, поэтому $k = 27$. Число 0 мальчик записал на странице с номером $k+1$, то есть на 28-й странице.

Ответ: а) 48; б) 1; в) 28.